

Trigonometrische Höhenbestimmung

Patrick Reimann¹

¹Amt für Geoinformation BL, Liestal, Switzerland

patrick.reimann@bl.ch

Part of this programme: swisstopo, ETH Zürich

Keywords: Höhenberechnung und Fehlertheorie; lange Distanzen; Refraktion; Erdkrümmung; Schwerefeld und –anomalie; Kontext zu Höhenbestimmung Mount Everest

1. Einführung

Zwischen 1846 und 1850 leitete Sir George Everest (1790-1866), Englischer Vermessungsingenieur, die von Nordindien her durchgeführte hochpräzise Höhenbestimmung der Achttausender in Nepal.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der gleichen Thematik vom Jungfrauoch ausgehend in den Schweizer Alpen. Insbesondere interessiert darin die Modellkonformität der schwer fassbaren Einflüsse der Refraktion und Schwereanomalie.

Sir George Everest leitete als Surveyor General of India lange Jahre die grosse trigonometrische Vermessung Indiens.



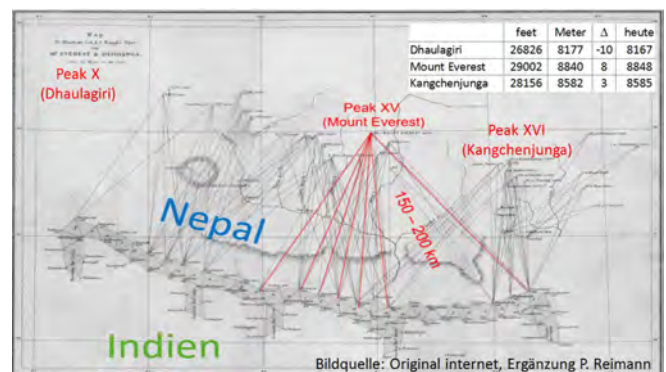
Figur 1. Triangulation Indien 1818-1852; Bildquelle: Internet

Unter dem Operateur Andrew Scott Waugh wurden ab dem Jahr 1846 die damals als Peak I bis XVI benannten Gipfel von Indien her aus einer Entfernung von 150 bis zu 200 km erstmals vermessen.



Figur 2. Sicht von Ladania (North India); Entfernung 161 km

Nach dem Abschluss der Vermessungsarbeiten haben umfangreiche, komplexe Berechnungen folgen müssen. 1852 kam es zu dem Ergebnis, dass „Peak XV“ mit 29.002 Fuß (8840 m) höher als alle anderen Gipfel sei.



Figur 3. Höhenbestimmung der Achttausender 1848-1852 aus Nord-Indien

Da wegen der großen Entfernungen noch letzte Zweifel an der Genauigkeit der Vermessungen auszuräumen waren, wurde dieses Resultat erst 1856 von Andrew Waugh in einem Schreiben an die Royal Geographical Society bekannt gegeben. Für Peak XV meinte er: «The mountain is not a sharp well-defined peak and was observed from a great distance».

Mit dieser Feststellung und der damaligen Kenntnis über die Erdkrümmung und -radius sowie Refraktion ist die geringe Differenz von 8 Meter zum Peak XV und auch zu den anderen Gipfeln beachtlich.

Zur Ehre dieses Werks benannte die Royal Geographical Society nach Antrag von Waugh Peak XV zu Mount Everest.

Hier wird versucht diese Leistung mit Instrumenten (Theodolite) aus den Jahren 1909, 1962 und 2003 in den Schweizer Alpen vom Jungfrauoch (Sphinx) her nachzuvollziehen.



Figur 4. Zielobjekte von der Hochalpinen Forschungsstation Jungfrauoch Sphinx

Der Unterschied zur Arbeit in Nordindien ist, dass hier die Koordinaten und Höhen der Zielpunkte bekannt sind und nicht mit Schnittpunktberechnungen wie damals für Nepal berechnet

werden müssen. Aus dieser Ausgangslage sollen über ein Modellstudium die Fragen zur Refraktion und Schwereanomalie beantwortet werden.

2. Fehlerquellen

Refraktion: Infolge der Inhomogenität der Luftschichten verläuft der Lichtstrahl zwischen zwei Punkten nicht geradlinig. In der Vermessung nimmt man die Lichtkurve als Kreisbogen an und bezeichnet als Refraktionskonstante κ das Verhältnis:

$$\kappa = r/R_L = \text{Erdradius/Lichtkreisradius}$$

Als Mittelwert für κ ergibt sich aus vielen Versuchen

$$\kappa = 0.13 \pm 0.04 \text{ und daraus } R_L = r/\kappa \approx 7 \cdot r$$

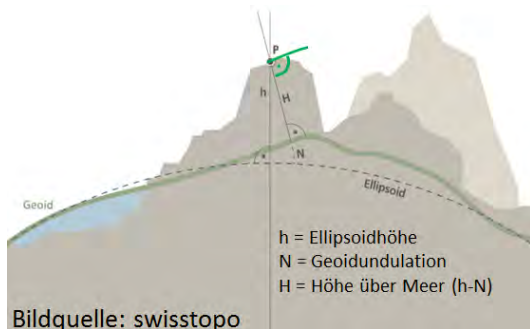
Der Mittelwert der Refraktion von 0.13 bewährt sich bei kurzen Distanzen mit geringem Höhenunterschied. Bei Distanzen mit einer Länge von 4 km und einem Höhenunterschied von mehr als 1'000 m wird dieses Model aber unbeständig. Namentlich ergeben sich bei auffälligem Unterschied der mittleren Temperaturen markante Änderung der effektiven Refraktion. Bei warmen Wetter werden für denselben Punkt kleinere Höhenwinkel gemessen als bei tieferen Temperaturen. In anderen Worten werden im Sommer mit Standort A bei konstant gehaltener Refraktion von 0.13 die rechnerische Höhe des Zielpunktes B tiefer ausfallen als im Winter. Die Erdoberfläche übt ebenfalls einen beträchtlichen Einfluss auf die Refraktion aus. Details dazu später.



Figur 5. Einfluss der Temperatur auf die Refraktion; Bildquelle Internet

Geoid und Schwerefeld

Das Geoid ist eine ausgewählte Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes und dient als Referenzfläche für die Höhenbestimmung. Man kann es sich als idealisierte, unter den Kontinenten weitergeführte mittlere Meeresoberfläche vorstellen (<https://www.swisstopo.admin.ch/> - Knowledge and facts – Surveying / Geodesy – Geoid). Das schweizerische Geoidmodell ist bekannt (CHGeo2004).

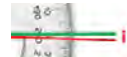


Figur 6. Einfluss des Geoids zur Horizontierung der Instrumente und zur effektiven Höhe über Meer; nicht massstäblich abgebildet

Bei Messung der Höhenwinkel ist die exakte Horizontierung des Theodolits entscheidend. Die horizontal waagrechte Visur erfolgt damit exakt rechtwinklig zur Schwerkraft (Lotlinie). In Abhängigkeit der Schwereanomalie im Untergrund kann sich die Lotlinie und die Geoidundulation (CHGeo2004) bereits nach kurzer Distanz entsprechend ändern. Gesucht und üblicherweise verwendet werden die orthometrischen Höhen (H).

Indexfehler

Indexfehler (i) entstehen, wenn der Höhenkreis, auf welchem am Theodolit der Höhenwinkel abgelesen wird, nicht absolut horizontal eingesetzt ist. Ein Fehler von zum Beispiel 10 Sekundengrad (0.0010°) ergeben auf einer Distanz von 10 Kilometer eine Höhenabweichung von 16 cm.



Figur 7. Indexfehler i

Um den Indexfehler zu eliminieren müssen die Höhenwinkel zwingend in zwei Lagen gemessen werden:



Figur 8. Elimination Indexfehler i

Sichtverhältnisse

Tiefe Luftfeuchtigkeit sorgt für klare Sicht, was die Messung ferner Ziele erst ermöglicht aber auch exaktes Anvisieren der mittleren und nahen Ziele gestattet.

3. Instrumente

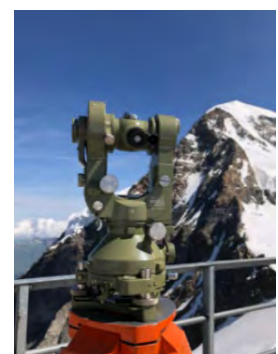
Um die Arbeiten von George Everest hinreichend einschätzen zu können werden neben einem zeitgemässen Gerät auch sehr alte Theodolite verwendet. Leica (2003) verfügt nebst viel Elektronik auch über einen Kompensator, mit welchem Abweichungen zur Lotlinie ausgeglichen werden. Bei Kern (1909) und Wild (1962) geschieht die Horizontierung ausschliesslich manuell über die Höhenkreislibellen.



Figur 9. Leica 1100, 2003 (Internet)



Figur 10. Kern Repetitions-Theodolit, 1909

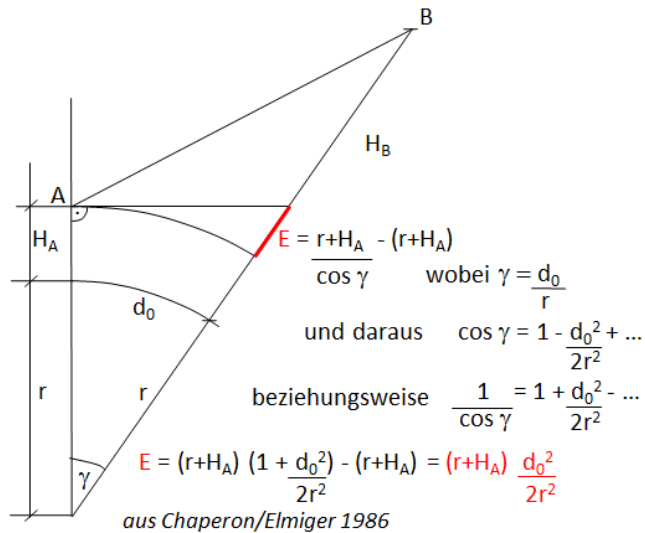


Figur 11. Wild T2, 1962

4. Formeln

Wenden wir uns nach diesen natürlichen und maschinellen Fehlerquellen den mathematischen Formeln zu, mit welchen durch die trigonometrischen Messungen Höhen berechnet werden.

Beginnen wir mit der Bestimmung der **Erdkrümmung**.



Figur 12. Berechnung der Erdkrümmung

Der zweite Summand ($H_A \cdot d_0^2 / 2r^2$) kann bis 10 km Distanz weggelassen werden, gewinnt aber bei grösseren Distanzen zunehmend an Bedeutung:

d_0 (km)	$d_0^2 / 2r$ (m)	$H_A \cdot d_0^2 / 2r^2$ (m)
1	0.08	0.00
2	0.31	0.00
5	1.96	0.00
10	7.85	0.00
20	31.40	0.02
50	196.23	0.11
100	784.93	0.43
150	1766.09	0.97
200	3139.72	1.73

Hat George Everest diese Formel verwendet, woran eigentlich nicht zu zweifeln ist, und den zweiten Summanden weggelassen, was zu bezweifeln ist, hätte sich das Resultat für den Mount Everest um 2 m auf 10 m 'verschlechtert'.

Ellipsoid und Erdradius

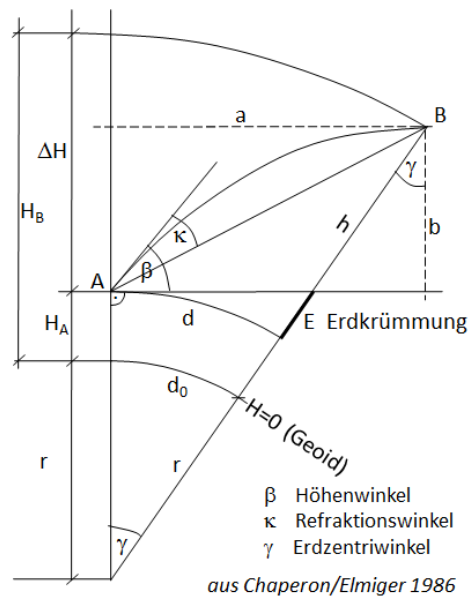
Die Erde ist keine perfekte Kugel, sie ist durch ihre Rotation an den Polen abgeplattet und nimmt die Form eines Ellipsoides an. In der Schweiz wird das Ellipsoid Bessel 1841 verwendet – am Äquator auf Meereshöhe 6377.397 km, an den Polen 6356.078 km. In Abhängigkeit des Breitengrades wird in der Schweiz der Erdradius 6370 km verwendet. Bei der Differenz von 200 km Süd-Nord nimmt die Abplattung gegen Norden um 0.5 m zu beziehungsweise der fiktive Erdradius um so viel ab. Bei der Einführung des mittleren Erdradius (6369.5 km) in der Formel vermindert sich die berechnete Höhe H_B um 1 cm. Diese Differenz ist mit den Instrumenten über 200 km optisch nicht feststellbar. Längengrade spielen bei der Abplattung keine Rolle, weshalb in der Schweiz für die Höhenbestimmung somit generell der Erdradius von 6370 m verwendet wird.

Mit Distanzen bis 200 km hatte wie gezeigt George Everest auch zu tun. Diese dürften für die Höhenbestimmung der Peak I-XVI auch keine Rolle gespielt haben. Allerdings würde interessieren, von welchem Erdradius damals ausgegangen worden ist. Zeitlich könnte es sich effektiv auch um die Anlehnung an Bessel 1841 gehandelt haben.

Wild'sche Höhenformel

In der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETHZ) lehrte Professor Dr. Francis Chaperon (1926-2016) die Wild'sche Höhenformel (Dr. H.C. Heinrich Wild (1877-1951)):

$$\Delta H = \frac{d_0 (1+H_B)}{r} * \text{tg } \beta + \frac{(r+H_A) d_0^2 (1-\kappa)}{2r^2} - \frac{d_0^2 * \text{tg}^2 \beta * \kappa}{2r} + J - S$$



Figur 13. Wild'sche Höhenformel

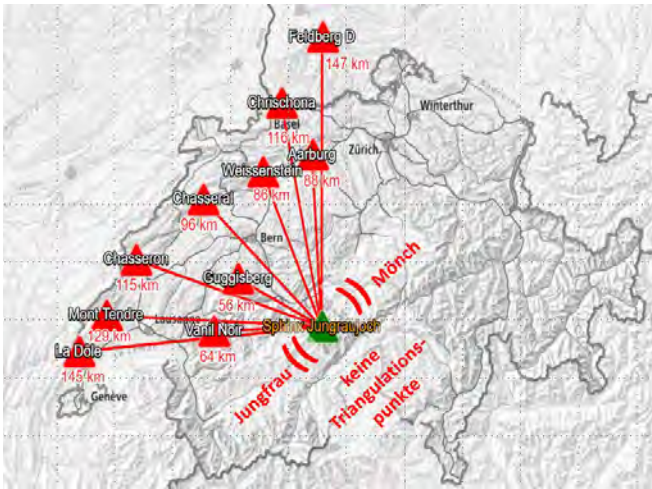
Die Glieder bedeuten:

- $\frac{d_0 (1+H_B)}{r} * \text{tg } \beta$
Bestimmung von h über a, b, γ und schliesslich $\text{tg } \beta$
 H_B ist nicht gekannt – kann hier aber im Meterbereich geschätzt werden
- $\frac{(r+H_A) d_0^2 (1-\kappa)}{2r^2}$
Bestimmung Erdkrümmung (E) mit Abzug der Refraktion (R): E-R
- $\frac{d_0^2 * \text{tg}^2 \beta * \kappa}{2r}$
Verminderung für kleine Winkel (Refraktionswinkel) mit der Taylorentwicklung
- J-S Instrumentenhöhe abzüglich Signalhöhe

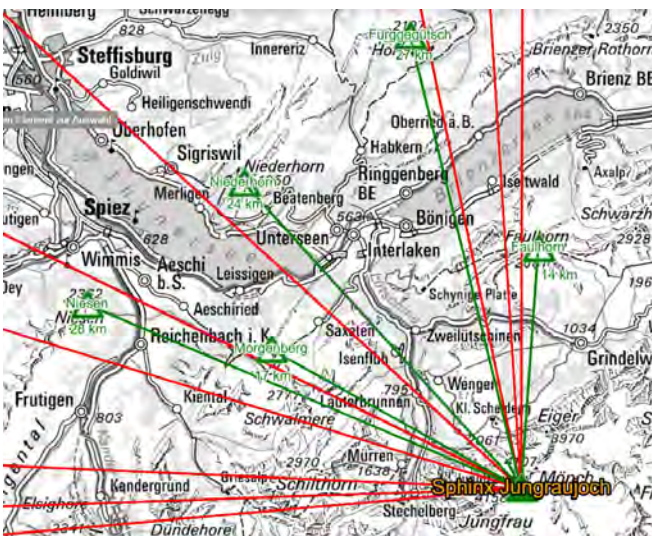
Die Herleitung befindet sich in der Autographie Chaperon/Elmiger 'Vermessungskunde', 1986, Kapitel 15.

4. Zielobjekte

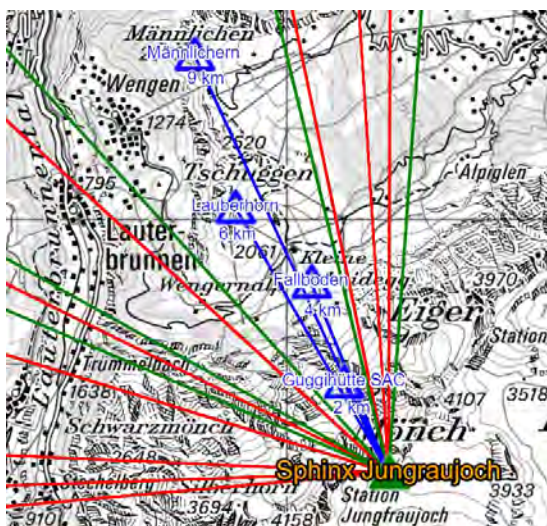
Für das Modellstudium Refraktion und Schwereanomalie werden hier Triangulationspunkte verwendet, welche die Grundlage der schweizerischen Landeskarte und auch für die Durchführung der amtlichen Vermessung (Grundbuchvermessung) sind. Auch wenn nur der vierte Quadrant freie Sicht zu diesen Punkten anbietet, ist die Hochalpine Forschungsstation Jungfrauojoch infolge der Visuren bis 150 km bestens dazu geeignet.



Figur 14. Weit entfernte Triangulationspunkte (10); Original: swisstopo



Figur 15. Mittelweit entfernte Triangulationspunkte (5); swisstopo

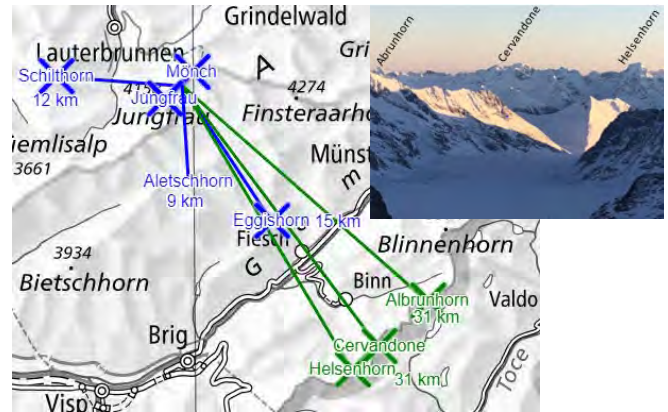


Figur 16. In der Nähe liegende Triangulationspunkte (4); swisstopo

Längenprofile haben einen Einfluss auf die Refraktion. Je näher die Visur über der Erdoberfläche verläuft, desto anfälliger ist sie für Abweichungen zur Refraktionskonstante 0.13.

Ungünstig Verhältnisse treffen wir beim Guggisberg an. Ein eher ideales Profil zeigt sich beim Chasseral (Figur 17).

Neben dem Modellstudium werden für markante Gipfel mit derselben Methode Höhen bestimmt und erstmalig mit den Angaben aus der Landeskarte verglichen.



Figur 18. Höhenbestimmung nah (5) und mittel (3); swisstopo

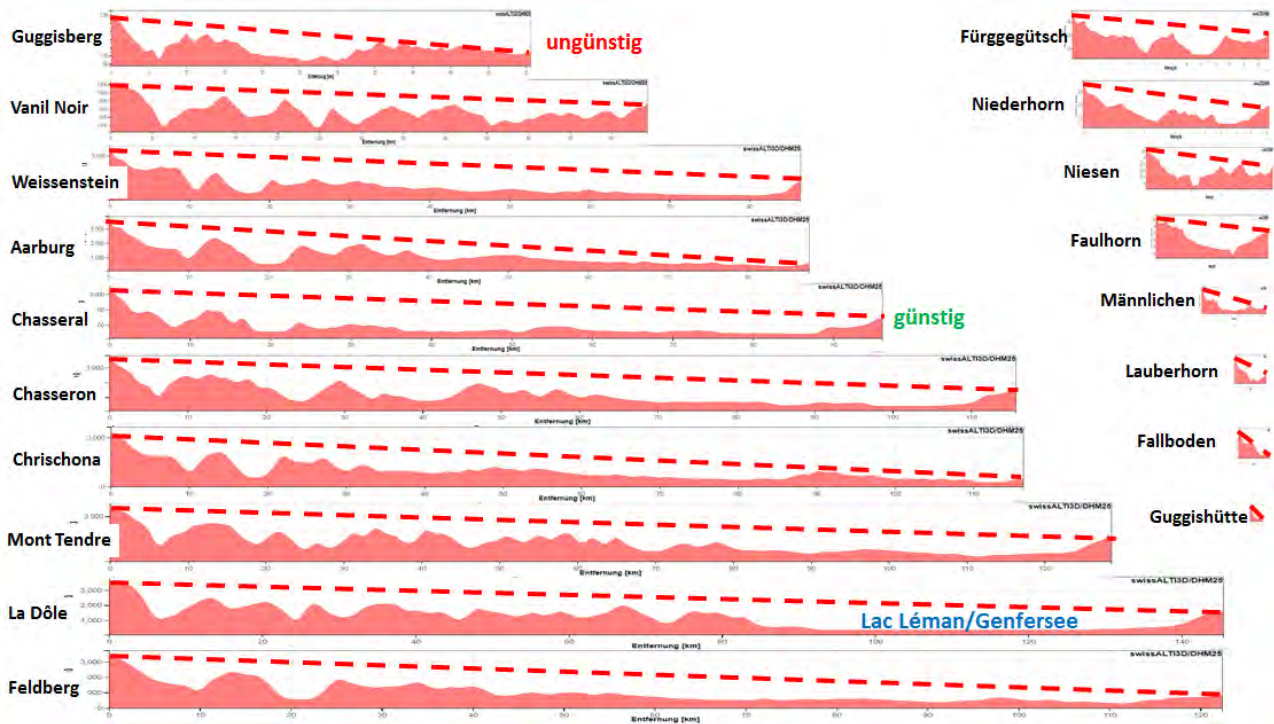
5. Erste Resultate

Kurze und mittlere lange Visuren konnten bereits Ende Sommer 2019, lange Visuren infolge ungünstiger Sichtverhältnisse erst Ende Oktober, im Dezember 2019 und im Januar 2020 beobachtet werden.

Die Resultate bei den kurzen und mittleren Visuren bewegen sich zwischen 1 cm bis zu wenigen dm. Die besten Ergebnisse konnten bei klaren Sichtverhältnissen erreicht werden. Interessant ist die Feststellung, dass sich die Resultate bei Messungen am Mittag gegenüber Messungen mit ähnlichen Sichtverhältnissen am gleichen Tag abends relevant und in systematischer Weise unterscheiden.

Bei den langen Visuren ergeben sich Schwierigkeiten, die Triangulationspunkte (Pyramiden) überhaupt erkennen zu können. Die jeweils höchsten Erhebungen dort werden als Zielpunkt verwendet. Die Differenzen zu den Triangulationspunkten sind zwar regelmässig, geben allerdings mangels Eindeutigkeit wenig Aufschluss zu den Modellfehlern (Refraktion und Schwereanomalie).

Bei La Dôle, Chasseral und Feldberg befinden sich gerade neben den Triangulationspunkten markante Gebäude, an welchen deren Dachkante anstatt die nicht erkennbaren Pyramiden gemessen werden. Um schlüssige Beurteilungen dazu erhalten zu können, werden in der Folge diese Dachkanten vor Ort gemessen oder deren Höhe aus anderen fachgerechten Quellen bezogen.



Figur 17. Längenprofile (aus swisstopo)



Figur 19. La Dôle (swisstopo)



Figur 20. Chasseral (Internet)



Figur 21. Visur Jungfraujoch-La Dôle

Am interessantesten sind die Messungen nach Westen zu La Dôle bei einer Entfernung von 145 km. Die Messungen zur Dachoberkante ergeben einen Unterschied zur Höhe des Triangulationspunktes von gegen 40 Meter. Das Gebäude wird nicht 40 m hoch sein, vielleicht 15 m. Die resultierende Differenz zum Triangulationspunkt von 25 m ist eigentlich enttäuschend hoch. Erstaunlich ist aber die relativ hohe Konstanz der Resultate aus verschiedenen Messungen, weshalb diese a priori nicht in Zweifel gezogen werden müssen. Die Visur streicht zunächst knapp an der Ostflanke der Jungfrau vorbei und überschreitet – wie aus dem Längenprofil erkennbar – dann das Terrain mit wechselndem mittleren Abstand, worauf es dann über 50 km über dem Genfersee verläuft. Es ist zu diskutieren, ob die Refraktion infolge des Genfersees oder infolge des geringen Abstands zur Ostflanke Jungfrau gesamthaft den Wert $\kappa = 0.18$ annimmt? Damit würde die Höhe des Triangulationspunktes erreicht.

Es wird ebenfalls zu prüfen sein, ob gegenüber La Dôle auf dem Jungfraujoch eine Schwereanomalie vorliegt, welche diese Differenz hervorruft. Dies wäre mit einer Differenz der Lotlinie mit 0.0100° der Fall. Allenfalls spielt die Kombination beider Faktoren eine Rolle.

Die Resultate zum gleich weit entfernten Feldberg (147 km) sind trotz ungünstigen Sichtverhältnissen einheitlich. Auch dort wird es darum gehen, einen eindeutigen Bezug zu einem Gebäude oder Turm zu erhalten.

Die Resultate zur Dachkante beim Chasseral zeigen relative Abweichungen von 1.2 m, was bei der Distanz von 96 km doch erstaunlich ist (Unterschied zu den Höhenwinkeln $< 0.0018^\circ$). Die Sichtverhältnisse aus dem obigen Bild konnten leider noch nicht angetroffen werden.

6. Ausblick

Stephen W. Hawking schreibt in seinem Buch «Eine kurze Geschichte der Zeit»: 'Gut ist eine Theorie, wenn sie zwei Voraussetzungen erfüllt: Sie muss eine **grosse Anzahl von Beobachtungen** enthalten und damit die Grundlage eines Modells beschreiben, das nur **einige wenige beliebige Elemente** enthält.'

Als Replik dazu muss betont werden, dass neben den 'Fehlern' aus der Identifizierung der Zielpunkte und damit etwas unsicheren Höhenwinkeln auch Modellfehler auftreten, die unter Umständen erheblich sein können. Es muss deshalb bei jedem Zielpunkt überprüft werden, ob die Annahmen zur **Lotabweichungen** zutreffen und ob die **Refraktion** jederzeit konstant bleibt. Siehe dazu die Bemerkungen zu La Dôle.

Es ist mit einer geeigneten Fehlertheorie eine Hypothese aufzustellen, welche mit entsprechend **genügend hoher Anzahl von Messungen** empirisch erhärtet werden kann.

Die praktische Arbeit auf dem Jungfrauojoch wird sich einerseits zu eindeutigen und klar abgrenzbaren Zielpunkten aus allen Distanzen reduzieren, andererseits aber auch mit weiteren Höhenbestimmungen von markanten umliegenden und weiter entfernten Gipfeln ergänzen. Diese Resultate werden erstmalig mit der Landeskarte und in naher Zukunft mit modernen Methoden der Höhenbestimmung über LiDAR überprüft. Diese Daten werden über das Bundesamt für Landestopografie (swisstopo) erstellt.

Im Kontext mit den Arbeiten von Sir George Everest werden ausgesuchte Zielpunkte gleichzeitig ebenfalls mit den beiden alten Theodoliten von Kern und Wild gemessen und ausgewertet.

Neben der praktischen Arbeit werden die astro-geodätischen und gravimetrischen Einflüsse auf das Geoidmodell CHGeo2004 und damit dessen Einfluss auf die Lotlinie zusammen mit dem Bundesamt für Landestopografie (swisstopo) untersucht. Mit dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich werden die Einflüsse der Refraktion diskutiert. Und selbstverständlich wird über alles eine Investition in die einschlägige Literatur notwendig sein.

Schlussendlich wird es darum gehen, gestützt daraus und aus den Erfahrungen aus der hochalpinen Forschungsstation Jungfrauojoch die Arbeiten und Modelle von Sir George Everest / Andrew Scott Waugh bei der Bestimmung der Achttausender in Nepal näher zu untersuchen.

References

- Eschmann 'Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz'; 1840
 Engi 'Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge'; 1951
 Chaperon/Elmiger 'Vermessungskunde'; 1986
 Stephan W. Hawking 'Eine kurze Geschichte der Zeit', ISBN 3 499 18850 3
 Brocks 'Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion insbesondere im Gebirge'; 1939

Internet data bases

<https://www.swisstopo.admin.ch/> ⇒ knowledge and facts ⇒ Surveying / Geodesy ⇒ FAQ ⇒ terrestrial curvature

Collaborating partners / networks

Prof. Dr. Andreas Wieser; Departement Bau, Umwelt und Geomatik, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETH Zürich
 Karl Heinz Münch, Studiensammlung Kern AG
 Ruedi Käser, Vermessungsingenieur HTL und Betriebsleiter HFSJG
 Julia Wunsch, Assistenz und Photographie (wo keine Bildquelle angegeben)

Address

Amt für Geoinformation BL
 Mühlemattstrasse 36
 CH-4410 Liestal
 Switzerland

Contacts

Patrick Reimann, Eidg. Pat. Ing.-Geometer
 Tel.: +41 61 552 5685
 e-mail: patrick.reimann@bl.ch